Aula 7

Funções Complexas

Exponencial Complexa

Definição: Define-se a **exponencial complexa**, $\text{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como a função que, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, é dada por

$$\text{Exp}(z) = \text{Exp}(x + iy) = e^x(\cos y + i \,\text{sen}\, y).$$

Proposição: A função Exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz as seguintes propriedades

- $\mathrm{Exp}(z+w) = \mathrm{Exp}(z)\mathrm{Exp}(w)$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.
- $(\mathrm{Exp}(z))^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Exp}(z)} = \mathrm{Exp}(-z)$.
- $(\mathrm{Exp}(z))^{k} = \mathrm{Exp}(kz), \qquad k \in \mathbb{Z}$.
- $\overline{\mathrm{Exp}(z)} = \mathrm{Exp}(\bar{z})$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Exp}(z) \neq 0$.
- $|\mathrm{Exp}(z)| = e^{x}, \qquad \mathrm{Arg}(\mathrm{Exp}(z)) = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $\mathrm{Exp}(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k\, i, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- Exp é uma função periódica,

$$\mathrm{Exp}(z + 2\pi k\, i) = \mathrm{Exp}(z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Passaremos, por abuso de notação, a escrever como em $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Exp}(z) = e^{z}.$$

Em particular tem-se

Identidade de Euler

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2\pi i} = 1}$$

Funções Trigonométricas

Definição: Definem-se as **funções trigonométricas coseno e seno complexas**, para cada $z \in \mathbb{C}$, como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposição: Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\cos(z + w) = \cos z \, \cos w - \operatorname{sen} z \, \operatorname{sen} w$
- $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \, \cos w + \operatorname{sen} w \, \cos z$
- $\operatorname{sen}(z + T) = \operatorname{sen} z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(z + T) = \cos z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Funções Hiperbólicas

Definição: Definem-se as **funções hiperbólicas complexas coseno e seno** , para cada $z \in \mathbb{C}$, como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Proposição: Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\cos(i\, z) = \cosh z \qquad \operatorname{sen}(i\, z) = i \operatorname{senh} z$
- $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
- $\cosh(z + w) = \cosh z\, \cosh w + \operatorname{senh} z\, \operatorname{senh} w$
- $\operatorname{senh}(z + w) = \operatorname{senh} z\, \cosh w + \operatorname{senh} w\, \cosh z$
- $\operatorname{senh}(z + T) = \operatorname{senh} z \Leftrightarrow T = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cosh(z + T) = \cosh z \Leftrightarrow T = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$

Logaritmo Complexo

Definição: Define-se o **logaritmo complexo com ramo** $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ como a função log $: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \log_{\mathbb{R}}|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \operatorname{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[.$$

Chama-se **ramo principal do logaritmo complexo** à escolha do ramo $]-\pi, \pi]$.